Feuille d'Exercices XI
Calcul Stochastique

Exercice 1. Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité équivalentes. On suppose qu'il existe $Y \in \mathcal{F}_T$ dans L^2 telle que $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A Y]$. Soit B un $\mathbb{P}$-mouvement brownien et $\{D_t\}$ une $\mathbb{P}$-martingale par rappport à la filtration brownienne associée. On suppose que l'on peut écrire

$$D_t = D_0 + \int_0^t d(\omega, s)\mathrm{d}B_s$$

et que $d(\omega, s) \neq 0$ a part sur un ensemble de $\mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t$ mesure zéro. Le but de l'exercice est de montrer que si D est aussi une $\mathbb{Q}$-martingale alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}_T$.

1. Montrer que si $M_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$ alors $(D_t M_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une $\mathbb{P}$-martingale.
2. Montrer que l'on peut écrire $M_t = 1 + \int_0^t \phi(\omega, s)\mathrm{d}B_s$.
3. En calculant la différentielle stochastique de $D_t M_t$, montrer que $\phi(\omega, s) = 0$ presque partout et en déduire que $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}_T$.

Exercice 2. On considère le modèle de Black–Scholes à coefficients constants

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t, \quad \mathrm{d}\beta_t = r\beta_t \mathrm{d}t.$$

Trouver le prix théorique pour le produit dérivé qui paye M si le cours de l'action atteint un niveau K sur $[0, T]$ et 0 sinon,

$$X = M\mathbb{1}_{\sup_{t\in[0,T]} S_t \geqslant K}.$$

Exercice 3. On considère le modèle suivant,

$$\mathrm{d}S_t = S_t \mathrm{d}t + tS_t \mathrm{d}B_t, \quad \mathrm{d}\beta_t = \beta_t \mathrm{d}t.$$

1. Calculer $\mathrm{d}D_t$ et montrer que D une $\mathbb{P}$-martingale. Ainsi, on a déjà $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.
2. On considère le produit dérivé $X = \exp\left(B_T + \frac{T}{2}\right)$. Trouver une représentation explicite du porte-feuille
$$V_t = \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{\beta_T}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$
3. Trouver les coefficients (a_t, b_t) du porte-feuille,
$$(a_t, b_t) = \left(\frac{\exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}{tS_t \mathrm{e}^{-t}}, \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right).$$
4. Montrer que pour tout $t \in (0, T]$, $\mathbb{P}\left(\int_0^t b_s \beta_s \mathrm{d}s = +\infty\right) = 1$ et en déduire que le modèle n'est pas complet.

Exercice 4. Dans le modèle de Black–Scholes à coefficients constants, on a vu que si $V_t = f(t, S_t)$ alors

$$a_t = \partial_x f(t, S_t), \quad b_t = \frac{1}{r\beta_t}\left(\partial_t f(t, S_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, S_t)\sigma^2 S_t^2\right)$$

On a aussi vu dans le cadre générale une autre formule $a_t = \frac{u(\omega,t)}{d(\omega,t)}, \quad b_t = U_t - \frac{u(\omega,t)}{d(\omega,t)}$. Montrer que les deux formules sont égales en utilisant le fait que

$$V_t = f(t, S_t) = \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T - K)_+}{\beta_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \beta_t U_t.$$

Fischer Black
(1938–1995)

Myron Samuel Scholes
(1941–)